TOP 10

UNE FONCTION INTÉGRABLE BIZARRE.

Les fichiers TOP sont réservées aux étudiants qui préparent le Top 5. Ils sont plus difficiles et demandent déjà une bonne maîtrise du reste du programme (cours, exercices, TD et méthodes). Même si le contenu de ces exercices dépasse le cadre du programme de ECG2, ils peuvent inspirer une série de questions d'un texte de concours.

Cet exercice concerne le chapitre 07 (Intégration).

Exercice 1.-
Soit f une fonction définie, continue et intégrable sur $[1, +\infty[$.

Vrai ou Faux : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$?

Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La *recherche* de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

Correction 1.-

C'est un point assez subtil d'intégration. La réponse est...Faux ! Dans le cas des séries en revanche, la réponse est vrai : si une série converge, le terme général tend vers 0. Ici, ce n'est pas le cas, voyons comment construire un contre-exemple. L'idée est de choisir une fonction qui prend des valeurs non nulles une infinité de fois mais sur un intervalle de plus en plus réduit de manière à ce que l'intégrale soit convergente.

Soit alors n un entier. Nous allons construire f sur chacun des intervalles $[n, n+1]$. On fait prendre à f la valeur 1 au milieu de chacun de ces intervalles $f\left(n+\frac{1}{2}\right)=1$ de sorte que f **ne tend pas vers 0** (elle prend la valeur 1 une infinité de fois).

Puis on s'arrange pour que f soit continue et que son intégrale converge. On pose alors $f(x)=0$ en dehors de l'intervalle $\left[n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2}, n+\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}\right]$ et, sur le sous-intervalle $\left[n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2}, n+\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}\right]$ on complète la définition de f en une fonction affine par morceaux et continue.

L'intégrale de f sur chacun des sous-intervalles $[n, n+1]$ est égal à l'aire du triangle (la courbe de f). Ainsi

$$\int_n^{n+1} f(t)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^2}\times 1\right) = \frac{1}{n^2},$$

puis l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est égal, par la relation de Chasles, à la somme des intégrales sur les intervalles $[n, n+1]$:

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$

qui est bien un nombre fini (série de Riemann de référence).

Remarque : Avec une modification de cet argument, on peut même trouver une fonction qui prend des valeurs arbitrairement grande (quitte à réduire encore la taille de l'intervalle sur lequel elle prend des valeurs non nulles).